École Supérieure de Commerce de Lyon
CONCOURS D'ENTRÉE 1980
MATHÉMATIQUES
1ère épreuve
Durée : 4 heures

Un corrigé

Première partie :

1. Pour $m > n > 2$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}
|v_m(x) - v_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{x^n+1}{(n+1)!}\left|1 + \frac{x}{n+2} + ... + \frac{x^{m-n-1}}{(n+2)...(m-1)m}\right| \\
&\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)^2} + ... + \frac{x^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}}\right)
\end{aligned}$$

et en désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |x|$, on a pour $m > n \geq n_0$:

$$|v_m(x) - v_n(x)| \leq \varepsilon_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{x}{n+2}}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} (\varepsilon_n) = 0$, ce qui implique que $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

Étudions le développement de Mac-Laurin de $f(x) = e^x$. Puisque $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout k, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout n fixé, son développement limité autour de 0 est donné par

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

où $R_n(x) = x^n \varepsilon_n(x)$, avec $\varepsilon_n(x) = \dfrac{xe^u}{(n+1)!}$, où $u \in]0, x[$. Ensuite, pour calculer la limite du reste, on a :

$$|R_n(x)| = |x^n \varepsilon_n(x)| = \frac{x^{n+1}e^u}{(n+1)!} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans cette dernière inégalité, on a utilisé le fait que $u \in]0, x[$. Maintenant, puisque x est fixé, le critère de d'Alembert (pour les suites) implique que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

on a donc bien $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Ceci implique que l'exponentielle peut être écrite à l'aide de sa série de Mac-Laurin, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \ e^x = \lim_{n \to \infty} w_n(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_{n+1}(x) - v_n(x) = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{x^p}{p!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \quad (1)$$
$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2)$$

Comme $x \geq 0$, on peut conclure que $v_{n+1}(x) - v_n(x) > 0$ puis que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'autre part,

$$w_{n+1}(x) - w_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\right) \quad (3)$$
$$= \frac{2\,x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \quad (4)$$
$$= \frac{(2x-(n+1))\,x^n}{(n+1)!} \quad (5)$$

La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si on a $w_{n+1}(x) - w_n(x) \leq 0$, c'est-à-dire si $2x-(n+1) \leq 0$, ou encore $n \geq 2x-1$.

3. (a) D'après la question précédente $\forall x > 0$, $\forall n > 2x-1$ on a $e^x < w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$. Maintenant, si $0 \leq n \leq 2x-1$ et $x \in]0,2[$, c'est-à-dire $0 \leq n \leq 2$, on a :
pour $n=0$, $e^x < e^{\ln 2} = 2 = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^0}{0!}$,
pour $n=1$, $e^x < \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^1}{1!} = 1+2x$ (car la fonction $x \mapsto 1+2x-e^x$ est strictement croissante sur $[0, \ln 2[$ et s'annule en 0).
pour $n=2$, $e^x < \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^2}{2!} = 1+x+2x^2 = 1+2x+(2x^2-x)$ (car $e^x < 1+2x$ et $2x^2-x \geq 0$).
Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \ln 2[, \quad e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \geq 2x-1$ et donc, d'après ce qui précède, $e^x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et comme $\frac{2x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$. D'où

$$e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

Si $n=0$, on a $e^x \leq e^1 < 1+e = \sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{1!}$.
En conclusion, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad e^x < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}.$$

Deuxième partie :

1. La suite $\left(s_n^A(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est autre que la suite de sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k$. Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left|\dfrac{\phi_A(k)}{k!}\right| \leq \dfrac{a^k}{k!}$ et la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a^k}{k!}$ converge, alors par comparaison la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k$ converge, c'est-à-dire la suite $\left(s_n^A(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. • $m(\varnothing) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_\varnothing(k)}{k!}a^k = 0$.

• $m(\{0\}) = 1$.

• $m(\{p\}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_{\{p\}}(k)}{k!}a^k = \frac{a^p}{p!}$.

• $m(\mathbb{N}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_{\mathbb{N}}(k)}{k!}a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k = e^a$.

3. (a) Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \subset B$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_B(k)}{k!}a^k$, puis par passage à la limite, $m(A) \leq m(B)$.

(b) Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \leq e^a < e^{\ln 2} = 2$$

D'où, par passage à la limite $0 \leq m(A) < 2$.

(c) Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$, on a donc $\phi_{A\cup B} = \phi_A + \phi_B$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_{A\cup B}(k)}{k!}a^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_B(k)}{k!}a^k.$$

L'égalité $m(A\cup B) = m(A) + m(B)$ s'obtient par passage à la limite.

4. (a) Si $\{p\} \subset A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^p}{p!} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k$ et donc $\dfrac{a^p}{p!} \leq \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_A(k)}{k!}a^k = m(A)$. D'autre part, pour n assez grand, $B \subset A\cup B \subset \{p, p+1, ..., n\}$ et $p \notin B$, donc $B \subset \{p+1, ..., n\}$ et par conséquent $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_B(k)}{k!}a^k \leq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a^k}{k!}$. Mais, d'après la question 3. de la première partie, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{a^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!} \leq \frac{a^p}{p!}$, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\phi_B(k)}{k!}a^k \leq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a^k}{k!} < \frac{a^p}{p!}$$

L'inégalité $m(B) < \dfrac{a^p}{p!} \leq m(A)$ s'obtient donc par passage à la limite.

(b) Ceci découle de la dernière question **4.(a)** de cette partie.

5. On a $A = (A\cap B) \cup (A \cap \complement_{\mathbb{N}}^{B})$ (réunion disjointe), donc $m(A) = m(A\cap B) + m(A\cap \complement_{\mathbb{N}}^{B})$ et de même $m(B) = m(A\cap B) + m(\complement_{\mathbb{N}}^{A} \cap B)$ ce qui donne :

$$m(A) - m(B) = m(A\cap \complement_{\mathbb{N}}^{B}) - m(\complement_{\mathbb{N}}^{A} \cap B).$$

6. Si $m(A) = m(B)$, alors $m(A\cap \complement_{\mathbb{N}}^{B}) = m(\complement_{\mathbb{N}}^{A}\cap B)$, alors $A\cap \complement_{\mathbb{N}}^{B} = \complement_{\mathbb{N}}^{A}\cap B = \varnothing$, donc $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$. Autrement dit, l'application $m : A \mapsto m(A)$ de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $[0, 2[$ est injective.

Troisième partie :

1. (a) La linéarité de U découle de celle de l'intégrale, de plus l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue, puisqu'elle est dérivable. Donc l'application U définie bien un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

(b) Si f est continue sur $[0,1]$, $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Supposons maintenant que $U^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$, alors $x \mapsto U^{n+1}(f)(x) = \int_0^x U^n(f)(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,1]$ (la fonction sous signe intégral est de classe $\mathscr{C}^n$). On conclut donc avec le principe de récurrence que $U(f)$ est de indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.

On a $[U^n(f)]' = [U(U^{n-1}(f))]' = U^{n-1}(f)$, puis par dérivations successives, on obtient $[U^n(f)]^{(k)} = U^{n-k}(f)$ et ceci pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Il est évident que $[U^n(f)]^{(n)} = U^{n-n}(f) = f$ et $[U^n(f)]^{(k)}(0) = U^{n-k}(f)(0) = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a $U^n(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $(U^n(f))^{(k)}(0) = 0$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral : $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} U^n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}[U^n(f)]^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[U^n(f)]^{(n)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(c) V_n est un polynôme en U, donc V_n et U commutent, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$V_n \circ U = \sum_{k=1}^{n} U^k \circ U = \sum_{k=1}^{n} U^{k+1} = V_{n+1} - U.$$

2. (a) $\|.\|$ est une application de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^+$, car pour f continue $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ existe.

Soit $f \in \mathscr{C}$. Si $\|f\| = 0$ alors $|f|$ est nulle. Par suite, f est nulle sur $[0,1]$.

$\forall f \in \mathscr{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|(\lambda f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|$.

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^2$.

$\forall x \in [0,1], \ \ |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$. Donc

$$\|f+g\| = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

Donc $\|.\|$ est une norme sur $\mathscr{C}$.

(b) Soit $f \in \mathscr{C}$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$|U(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \mathrm{d}t = x\|f\| \leq \|f\|.$$

D'où

$$\|U(f)\| = \sup_{x\in[0,1]} |U(f)(x)| \leq \|f\|.$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}$ et $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |V(f)(x) - V_n(f)(x)| &= \left|\int_0^x e^{x-t} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} U^k(f)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^x e^{x-t} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^x \left(e^{x-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}\right) f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \int_0^x \left|e^{x-t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!}\right| |f(t)|\mathrm{d}t \ \text{ d'après l'inégalité (2) de la 1ère partie} \\ &= \int_0^x \frac{e}{n!} |f(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{e}{n!}\|f\|. \end{aligned}$$

D'où
$$\|V(f)-V_n(f)\| = \sup_{x\in[0,1]} |V(f)(x)-V_n(f)(x)| \leq \frac{e}{n!}\|f\|.$$

4. (a) L'égalité $V\circ U = U\circ V = V-U$ entraine $(I-U)(I+V) = I+V-U-UV = I+V-U+V-U = I$ et $(I+V)(I-U) = I-U+V-VU = I-U+V-VU = I$. Donc $I-U$ est inversible et son inverse $(I-U)^{-1} = I+V$.

(b) L'équation intégrale s'écrit $(I-U)(f) = g$ où $g : x\mapsto e^{-x}$. Comme $I-U$ est inversible, f est l'unique antécédent de g par l'isomorphisme $I-U$. D'après la question précédente $f = (I+V)(g)$ ou encore
$$\forall x\in[0,1],\ \ f(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{x-t}e^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x).$$

• • • • • • • • • •